

No.1 ベクトル空間の定義

この回のゴール

- ベクトル空間の定義（8つの法則）を述べられる。
- $\mathbb{R}^n$ 以外のベクトル空間（行列・多項式・関数）の例を挙げ、零ベクトルが何かを答えられる。
- ベクトル空間にならない集合の例を挙げ、どの法則が崩れるかを説明できる。
- 「 $0a = 0$ 」のような基本的な性質を、8つの法則だけから証明できる。

■ 1. 「ベクトル」とは何か

高校では、ベクトルを「向きと大きさをもつ矢印」として学んだ。しかし線形代数でベクトルを扱うとき、実際に使っていたのは次の2つの操作だけである。

- 2つのベクトルを足すこと。
- ベクトルを実数倍すること。

第1章 No.1 で見たように、行列にも和とスカラー倍があり、同じ8つの法則（第1章 No.1 定理1）を満たしていた。実は多項式や関数にも、同じ法則を満たす和とスカラー倍がある。

そこで発想を逆転させる。「矢印かどうか」は気にせず、和とスカラー倍ができて、8つの法則を満たすものを、すべてベクトルと呼ぶことにする。

■ 2. ベクトル空間の定義

定義 1 ベクトル空間

集合 V に、次の2つの演算が定められているとする。

- **和**： V の2つの要素 a, b に対して、 V の要素 $a + b$ がただ1つ定まる。
- **スカラー倍**：実数 c と V の要素 a に対して、 V の要素 ca がただ1つ定まる。

これらが、すべての $a, b, u \in V$ と $c, d \in \mathbb{R}$ について次の8つの法則を満たすとき、 V を（実数上の）**ベクトル空間**（線形空間）といい、 V の要素を**ベクトル**という。

$$(V1) \quad a + b = b + a$$

$$(V2) \quad (a + b) + u = a + (b + u)$$

$$(V3) \quad \text{ある要素 } 0 \in V \text{ が存在して、すべての } a \text{ に対し } a + 0 = a \quad (0 \text{ を零ベクトルという})$$

$$(V4) \quad \text{各 } a \text{ に対し、ある } a' \in V \text{ が存在して } a + a' = 0 \quad (a' \text{ を } a \text{ の逆ベクトルという})$$

$$(V5) \quad c(a + b) = ca + cb$$

$$(V6) \quad (c + d)a = ca + da$$

$$(V7) \quad (cd)a = c(da)$$

$$(V8) \quad 1a = a$$

注意

- 演算の結果が**必ず** V の中に入ることも定義に含まれている（和やスカラー倍で V の外に出てはいけない）。これを「 V は和とスカラー倍について閉じている」という。
- 「0」が2種類あることに注意。実数の0と、 V の零ベクトル $\mathbf{0}$ は別物である。このプリントではベクトルを太字で書いて区別する。
- この講座ではスカラーは実数だけを考える。スカラーを複素数にした「複素ベクトル空間」もある。

■ 3. ベクトル空間の例

例1 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$

実数を n 個縦に並べた列ベクトル全体

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

は、成分ごとの和とスカラー倍でベクトル空間になる。零ベクトルは全成分が0の列ベクトル。これを n 次元数ベクトル空間という。

例2 行列の空間

$m \times n$ 行列全体の集合を $M_{m,n}(\mathbb{R})$ と書く。行列の和とスカラー倍でベクトル空間になる（第1章 No.1 定理1 がまさに (V1)~(V8) である）。零ベクトルは零行列 O 。

例3 多項式の空間

x についての実数係数の多項式で、次数が n 以下のものの全体を $\mathbb{R}[x]_n$ と書く。

$$\mathbb{R}[x]_n = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

ふつうの多項式の足し算と実数倍でベクトル空間になる。零ベクトルは多項式0（すべての係数が0）。次数の制限をつけない多項式全体 $\mathbb{R}[x]$ もベクトル空間である。

例4 関数の空間

$\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数全体を $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ と書く。2つの関数 f, g と実数 c に対して

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x)$$

と定めると、 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ はベクトル空間になる。零ベクトルは、いつでも値が0の定数関数。ここでは $\sin x$ や e^x のような関数1つ1つがベクトルである。

コラム：なぜわざわざ抽象化するのか

ここで定義から導いた性質（このあとの定理1など）は、(V1)~(V8)しか使わずに証明する。すると、その性質は $\mathbb{R}^n$ でも、行列でも、多項式でも、関数でも、**いっぺんに**成り立つことになる。たとえば微分方程式 $y'' + y = 0$ の解全体はベクトル空間になり、線形代数の結果がそのまま使える（微分方程式の学習で再び登場する）。1つの理論で多くの対象を扱えることが、抽象化のいちばんの利点である。

■ 4. ベクトル空間にならない例

例 5

$\mathbb{R}^2$ と同じ和・スカラー倍を使うとき、次の集合はベクトル空間にならない。

- (a) $\{ {}^t(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0 \}$ (第1象限と軸) : ${}^t(1, 1)$ を -1 倍すると ${}^t(-1, -1)$ になり、外に出る。逆ベクトルもない。
- (b) $\{ {}^t(x, y) \mid y = x + 1 \}$ (原点を通らない直線) : 零ベクトル ${}^t(0, 0)$ を含まない。また ${}^t(0, 1) + {}^t(1, 2) = {}^t(1, 3)$ は外に出る。
- (c) $\{ {}^t(x, y) \mid x, y \text{ は整数} \}$: ${}^t(1, 0)$ を $\frac{1}{2}$ 倍すると外に出る。

また、「ちょうど2次の多項式全体」もベクトル空間にならない。 $(x^2 + 1) + (-x^2 + x) = x + 1$ は2次でないし、零ベクトル（多項式0）も含まない。

確認のコツ

$\mathbb{R}^n$ や $M_{m,n}(\mathbb{R})$ の一部分を、同じ演算で考えるとき、(V1)(V2)(V5)~(V8) は元の空間で成り立っているのが自動的に成り立つ。チェックすべきなのは、**零ベクトルを含むか**と**和とスカラー倍について閉じているか**である（閉じていれば $(-1)\mathbf{a}$ も入るので、逆ベクトルも入る）。このことはNo.4「部分空間」で正確に扱う。

■ 5. 8つの法則から導かれる性質

定理 1 ベクトル空間の基本性質

V をベクトル空間、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u} \in V$, $c \in \mathbb{R}$ とする。

- (1) 零ベクトルはただ1つである。
- (2) $\mathbf{a}$ の逆ベクトルはただ1つである。（これを $-\mathbf{a}$ と書き、 $\mathbf{b} + (-\mathbf{a})$ を $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ と書く。）
- (3) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{u}$ ならば $\mathbf{b} = \mathbf{u}$. (簡約法則)
- (4) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
- (5) $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- (6) $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.
- (7) $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ならば、 $c = 0$ または $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

どれも「当たり前」に見えるが、(V1)~(V8) **だけ**を使って示すことが大切である。多項式や関数のベク

トル空間でも成り立つと保証するためには、 $\mathbb{R}^n$ の成分計算に頼れない。

【証明】 (1) $\mathbf{0}, \mathbf{0}'$ がどちらも零ベクトルとする。 $\mathbf{0}$ が零ベクトルなので $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$ 。 $\mathbf{0}'$ が零ベクトルなので $\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$ 。 (V1) より左辺どうしは等しいので $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$ 。

(2) $\mathbf{a}', \mathbf{a}''$ がどちらも $\mathbf{a}$ の逆ベクトルとする。 (V1)~(V3) を使って

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}' + \mathbf{0} = \mathbf{a}' + (\mathbf{a} + \mathbf{a}'') = (\mathbf{a}' + \mathbf{a}) + \mathbf{a}'' = \mathbf{0} + \mathbf{a}'' = \mathbf{a}''.$$

($\mathbf{a}' + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} + \mathbf{a}'' = \mathbf{a}'' + \mathbf{0} = \mathbf{a}''$ も (V1) による.)

(3) 両辺に左から $-\mathbf{a}$ を加え, (V2) を使うと $(-\mathbf{a} + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = (-\mathbf{a} + \mathbf{a}) + \mathbf{u}$, つまり $\mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$ で $\mathbf{b} = \mathbf{u}$ 。

(4) (V6) より $0\mathbf{a} = (0+0)\mathbf{a} = 0\mathbf{a} + 0\mathbf{a}$ 。 一方 (V3) より $0\mathbf{a} = 0\mathbf{a} + \mathbf{0}$ 。 よって $0\mathbf{a} + 0\mathbf{a} = 0\mathbf{a} + \mathbf{0}$ で, (3) より $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 。

(5) (V5) より $c\mathbf{0} = c(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = c\mathbf{0} + c\mathbf{0}$ 。 (4) と同様に (3) を使って $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ 。

(6) (V8)(V6) と (4) より $\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = 1\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = (1 + (-1))\mathbf{a} = 0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 。 つまり $(-1)\mathbf{a}$ は $\mathbf{a}$ の逆ベクトルである。 (2) より逆ベクトルはただ1つなので $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ 。

(7) $c \neq 0$ のとき $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ を示せばよい。 (V8)(V7) と (5) より $\mathbf{a} = 1\mathbf{a} = (c^{-1}c)\mathbf{a} = c^{-1}(c\mathbf{a}) = c^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ 。

□

証明を読むときのポイント

各等号が**どの法則によるか**を1つずつ確認しよう。特に (4) の $0\mathbf{a} = (0+0)\mathbf{a}$ は「実数の $0 = 0+0$ 」を使っていて、 $= 0\mathbf{a} + 0\mathbf{a}$ は (V6) を使っている。実数の世界とベクトルの世界を行き来しているのが分かる。

■ 練習問題

1. 通常の和とスカラー倍について、次の集合はベクトル空間になるか。ならないものは理由を答えよ。

(a) $\{^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

(b) $\{^t(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

(c) $\{^t(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

(d) $\{f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid f(1) = 0\}$

(e) $\{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$

2. ベクトル空間 V で、次を (V1)~(V8) と定理1 を使って示せ。

(1) $-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$

(2) $(-c)\mathbf{a} = -(c\mathbf{a})$

(3) $c(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = c\mathbf{a} - c\mathbf{b}$

3. ベクトル空間 V の要素 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が与えられたとき、 $2\mathbf{x} + \mathbf{a} = 5\mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x} \in V$ を求めよ。また、各段階でどの法則を使ったかを書け。

4. 関数の空間 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ で、零ベクトルと、 $f(x) = \sin x$ の逆ベクトルをそれぞれ答えよ。

5. (考えてみよう) 正の実数全体 $\mathbb{R}_{>0}$ に, 次のような「和」 $\oplus$ と「スカラー倍」 $\odot$ を定める.

$$a \oplus b = ab \text{ (ふつうの積)}, \quad c \odot a = a^c \text{ (ふつうの累乗)}.$$

- (1) この演算で $\mathbb{R}_{>0}$ の「零ベクトル」は何か. a の「逆ベクトル」は何か.
- (2) (V5) と (V6) が成り立つことを確かめよ.
- (3) $\mathbb{R}_{>0}$ はこの演算でベクトル空間になる. 「ベクトル」や「零」という言葉が, 見た目とは無関係であることを説明せよ.

■ 練習問題の解答

1. 第4節の「確認のコツ」に従い, 零ベクトルを含むか, 和とスカラー倍で閉じているかを調べる.

- (a) なる. $\mathbf{0}$ を含み, $x + y + z = 0, x' + y' + z' = 0$ なら $(x + x') + (y + y') + (z + z') = 0, cx + cy + cz = 0$.
- (b) ならない. ${}^t(1, 0)$ と ${}^t(0, 1)$ は含まれるが, 和 ${}^t(1, 1)$ は $1 \cdot 1 \neq 0$ で含まれない.
- (c) ならない. 零ベクトル ${}^t(0, 0)$ を含まない.
- (d) なる. 多項式 0 は $f(1) = 0$ を満たし, $f(1) = g(1) = 0$ なら $(f + g)(1) = 0, (cf)(1) = 0$.
- (e) ならない. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ はどちらも行列式 0 だが, 和 E の行列式は 1 .

2. (1) $-a + a = a + (-a) = \mathbf{0}$ なので, a は $-a$ の逆ベクトル. 定理1 (2) より $-(-a) = a$.

(2) (V6) と定理1 (4) より $ca + (-c)a = (c + (-c))a = 0a = \mathbf{0}$. よって $(-c)a$ は ca の逆ベクトルで, $(-c)a = -(ca)$.

(3) 定理1 (6), (V7), (2) を使うと $c(a - b) = ca + c((-1)b) = ca + (-c)b = ca - cb$. (1つめの等号は (V5).)

3. 両辺に $-a$ を加えると, (V2)(V4)(V3) より $2x = 5b - a$. 両辺を $\frac{1}{2}$ 倍すると, (V7)(V8) より $\frac{1}{2}(2x) = (\frac{1}{2} \cdot 2)x = 1x = x$ なので $x = \frac{1}{2}(5b - a) = \frac{5}{2}b - \frac{1}{2}a$ (最後は (V5)(V7) と練習問題2).

4. 零ベクトルは定数関数 0 (すべての x で値が 0). $\sin x$ の逆ベクトルは関数 $-\sin x$. $(\sin x) + (-\sin x) = 0$ がすべての x で成り立つから.

5. (1) 「零ベクトル」は 1 . $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$ だから. a の「逆ベクトル」は $\frac{1}{a}$. $a \oplus \frac{1}{a} = 1$ だから.

(2) (V5): $c \odot (a \oplus b) = (ab)^c = a^c b^c = (c \odot a) \oplus (c \odot b)$. (V6): $(c + d) \odot a = a^{c+d} = a^c a^d = (c \odot a) \oplus (d \odot a)$.

(3) ここでの「零ベクトル」は数の 1 であり, 「和」はふつうの積である. ベクトル空間であるかどうかは, 演算が (V1)~(V8) を満たすかどうかだけで決まり, 要素が矢印や数の並びに見えるかどうかとは関係ない.

※ $\log$ を取ると $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log(a^c) = c \log a$ となり, この空間はふつうの $\mathbb{R}$ と「同じ構造」をしていることが分かる (第5章 No.3 の「同型」).